Методы подобия и размерности в механике 7М05405-Механика и энергетика Лекция2 Краткий конспект 2

**Лекция 2. Движение математического маятника. Метод размерности**

Математический маятник представляет собой тяжелую материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, которая закреплена другим своим концом неподвижно. Совокупность возможных движений ограничим условием, что движения маятника плоское.

Введем обозначения:$ l$ – длина маятника, $φ$ – угол между нитью и вертикалью, *t* – время, *m –* масса груза и *N* – натяжение нити. Если пренебречь силами сопротивления, то задача о движении маятника приводится к решению уравнений

$\frac{d^{2}φ}{dt^{2}}=-\frac{g}{l}sinφ$, (1)

$m\left(\frac{dφ}{dt}\right)^{2}l=N-mgcosφ$, (2)

С начальным условием:

при $t=0, φ=φ\_{0} , \frac{dφ}{dt}=0$ , (3)

т.е., за начальный момент времени принят тот момент, когда маятник отклонен на угол $φ\_{0}$ , а скорость равна нулю.

Из уравнений (1) и (2) и начального условия очевидно, что в качестве определяющих параметров можно взять следующую систему:

$t, l$*,* $g, m$*,* $φ\_{0}$ .

Следовательно, искомые характеристики можно записать в виде:

$φ=φ\left(t,φ\_{0},l,g,m\right), N=mg f\left(t,φ\_{0},l,g,m\right) ,$ (4)

где $φ$ и $f$ – безразмерные функции.

Вид этих функций можно определить, решая уравнения (1) и (2) на основе начальных условий. Однако здесь обратимся к теории метода размерности. В частности, пять аргументов функций $φ$ и $f$ можно свести только к двум аргументам, которые представляют собой безразмерные комбинации, составленные из $t,l,g,m$ и $φ\_{0}$ , так как имеются три независимые единицы измерений.

Из величин $t,l,g,m$ и $φ\_{0}$ можно составить две независимые безразмерные комбинации:

$φ\_{0} и t\sqrt{\frac{g}{l}}$ . (5)

Все другие безразмерные комбинации, составленные из $t,l,g,m$ и $φ\_{0}$ , будут функциями комбинаций (5). Следовательно, можно записать:

$φ=φ\left(φ\_{0} , t\sqrt{\frac{g}{l}} \right) , N= mg f\left(φ\_{0} , t\sqrt{\frac{g}{l}} \right)$. (6)

Формулы (6), полученные с помощью метода размерности, показывают, что закон движения не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза. Эти выводы также непосредственно вытекают из уравнений (1) и (2). Величину $t\sqrt{g/l} $можно рассматривать как время, выраженное в специальной системе единиц измерения, в которой длина маятника ($l$) и ускорение силы тяжести ($g$) приняты равными единице.